中学校　数学

年	組	番	氏名

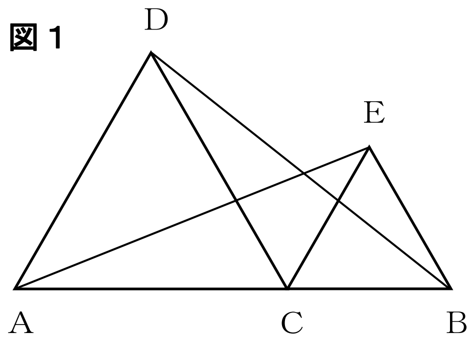
1　花子さんは、次の問題を解きました。

問題

　右の**図１**のように、線分ＡＢ上に点Ｃをとり、ＡＣ、ＢＣをそれぞれ一辺とする正三角形ＡＣＤ、正三角形ＣＢＥをＡＢの上側につくり、ＡとＥ、ＢとＤをそれぞれ結ぶ。

　このとき、ＡＥ＝ＤＢとなることを証明しなさい。

図１



花子さんの証明

△ＡＣＥと△ＤＣＢにおいて

仮定より、△ＡＣＤと△ＣＢＥは正三角形だから

ＡＣ＝ＤＣ　　……①

ＣＥ＝ＣＢ　　……②

正三角形の１つの内角は６０°だから

∠ＡＣＤ＝∠ＥＣＢ＝６０°　　……③

③より

∠ＡＣＥ＝∠ＡＣＤ＋∠ＤＣＥ

＝６０°＋∠ＤＣＥ　　……④

∠ＤＣＢ＝∠ＥＣＢ＋∠ＤＣＥ

＝６０°＋∠ＤＣＥ　　……⑤

④、⑤より

∠ＡＣＥ＝∠ＤＣＢ　　……⑥

①、②、⑥より

［　　　　　　　　　　］から

△ＡＣＥ≡△ＤＣＢ

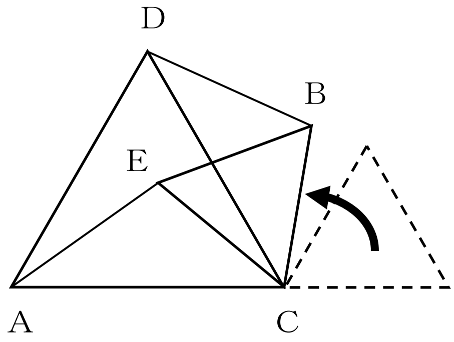
したがって　　ＡＥ＝ＤＢ

（１）**花子さんの証明**において、空欄［　　　］に当てはまる三角形の合同条件を答えなさい。

（２）花子さんは、問題を解きながら、**図２**のように、正三角形ＣＢＥを点Ｃを中心として矢印のように、回転移動させた場合も、ＡＥ＝ＤＢになると予想しました。

図２の場合において、ＡＥ＝ＤＢとなることは、前ページの**花子さんの証明**の一部を書き直すだけで、（１）と同じ三角形の合同条件で証明できます。書き直すことが必要な部分を下の**ア**から**エ**までの中から１つ選び、正しく書き直しなさい。

図２



△ＡＣＥと△ＤＣＢにおいて

ア
仮定より、△ＡＣＤと△ＣＢＥは正三角形だから

ＡＣ＝ＤＣ　……①

ＣＥ＝ＣＢ　……②

イ
正三角形の１つの内角は６０°だから

∠ＡＣＤ＝∠ＥＣＢ＝６０°　……③

ウ
③より

∠ＡＣＥ＝∠ＡＣＤ＋∠ＤＣＥ

＝６０°＋∠ＤＣＥ　……④

∠ＤＣＢ＝∠ＥＣＢ＋∠ＤＣＥ

＝６０°＋∠ＤＣＥ　……⑤

エ
④、⑤より

∠ＡＣＥ＝∠ＤＣＢ　……⑥

①、②、⑥より

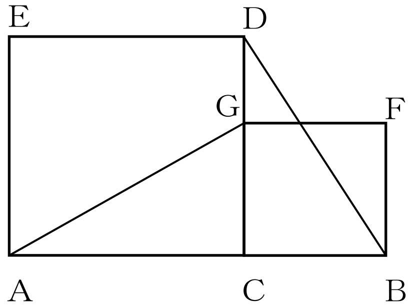
$\boxed{}$ から

△ＡＣＥ≡△ＤＣＢ

したがって　ＡＥ＝ＤＢ

太郎さんは、**図１**の正三角形を正方形に変えたとき、同じようなことがいえないかと考え、**図３**のような図をかき、**花子さんの証明**を参考に考えたところ、同じようにＡＧ＝ＤＢとなることが分かりました。

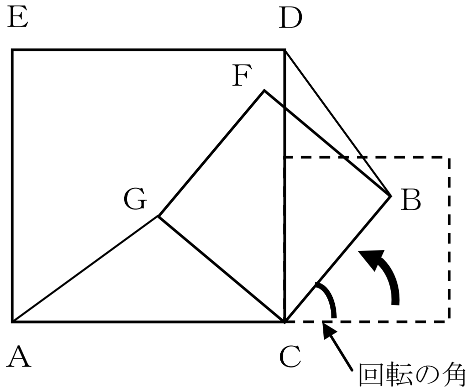
図３



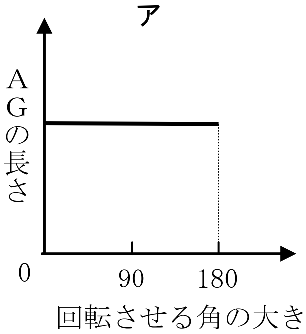
（３）太郎さんは、次に、正方形ＣＢＦＧを**図４**のように点Ｃを中心に、０°から180°まで回転させたとき、線分ＡＧの長さがどのように変化するかについて考えました。

回転させる角の大きさが、０°から 180°へと変化することにともない、線分ＡＧの長さがどのように変化するかを表すグラフとして適切なものを、**ア**から**オ**の中から選び、記号で答えなさい。

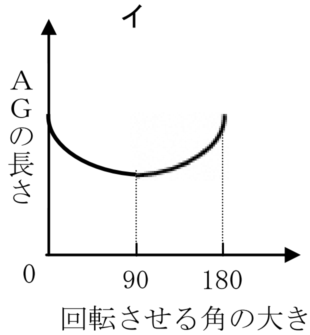
図４



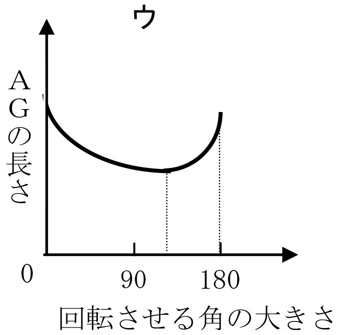
ア



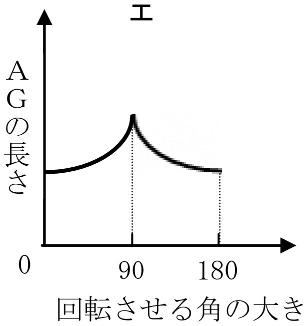
イ



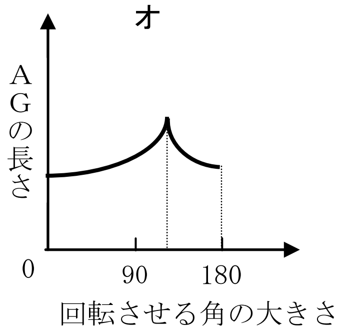
ウ



エ



オ

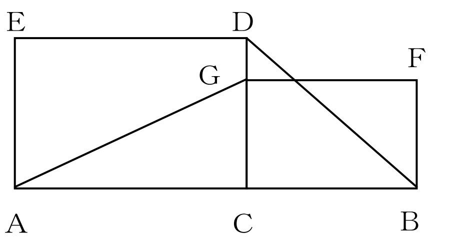


（４）太郎さんは、さらに、正方形の他に、ＡＧ＝ＤＢとなる四角形がないかどうか考えました。すると、**図５**のような長方形や平行四辺形では、ＡＧ＝ＤＢにならないことが分かりました。

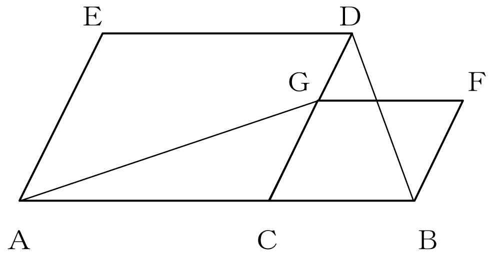
ただし、四角形ＣＢＦＧは四角形ＡＣＤＥを縮小した四角形とする。

図５

四角形ＡＣＤＥと四角形ＣＢＦＧが**長方形の場合**

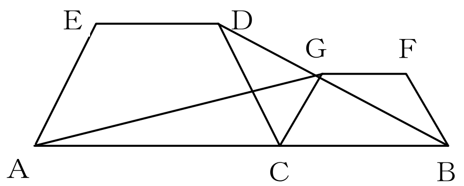


四角形ＡＣＤＥと四角形ＣＢＦＧが**平行四辺形の場合**

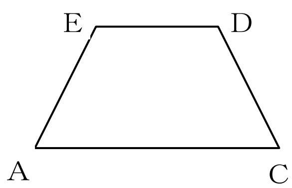


次に、**図６**のような四角形ＡＣＤＥと四角形ＣＢＦＧが等脚台形の場合を考えました。すると、ＡＧ＝ＤＢが成り立つ場合があることが分かりました。どのような場合に成り立つのか、また、成り立つ理由を書きなさい。

図６



（注）等脚台形とは、下の図のようにＥＤ//ＡＣ　かつ
∠ＥＡＣ＝∠ＤＣＡ　である台形である。



中学校　数学　解答用紙

年	組	番	氏　　　名

1

（１）	(三角形の合同条件)
（２）	(選んだ記号)　(書き直した内容)
（３）	
（４）	の場合にＡＧ＝ＤＢが成り立つ 理由

中学校　数学　正答例

年	組	番	氏　　　　名

1

<table>
<tr><td>（１）</td><td colspan="2">(三角形の合同条件)
２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい</td></tr>
<tr><td>（２）</td><td>(選んだ記号)
ウ</td><td>(書き直した内容)
∠ＡＣＥ＝∠ＡＣＤ－∠ＤＣＥ
＝６０°－∠ＤＣＥ
∠ＤＣＢ＝∠ＥＣＢ－∠ＤＣＥ
＝６０°－∠ＤＣＥ</td></tr>
<tr><td>（３）</td><td colspan="2">イ</td></tr>
<tr><td>（４）</td><td colspan="2">(例)
ＡＣ＝ＤＣ　の場合にＡＧ＝ＤＢが成り立つ

理由
・△ＡＣＧと△ＤＣＢにおいて、ＡＣ＝ＤＣ、ＣＧ＝ＣＢ、∠ＡＣＧ＝∠ＤＣＢであり、２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、△ＡＣＧ≡△ＤＣＢ　となるから

・△ＡＣＧ≡△ＤＣＢ　となるから

など</td></tr>
</table>

〈中学校　数学　解説〉

設問 $\boxed{1}$ (1)

1　解説

趣旨

証明の根拠となる三角形の合同条件を理解しているかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　Ｂ　図形

(2)　図形の合同について理解し図形についての見方を深めるとともに、図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ、論理的に考察し表現する能力を養う。

ア　平面図形の合同の意味及び三角形の合同条件について理解すること。

イ　証明の必要性と意味及びその方法について理解すること。

■評価の観点

数量や図形などについての知識・理解

解答類型

問題番号			解答類型	正答
1	(1)	1	２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい　と解答しているもの	◎
		2	２組の辺と１組の角がそれぞれ等しい　と解答しているもの	
		3	３組の辺がそれぞれ等しい　と解答しているもの	
		4	１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい　と解答しているもの	
		99	上記以外の解答	
		0	無解答	

■誤答について

・二つの三角形について、辺や角の相等関係から、証明の根拠となる三角形の合同条件を見いだすことができていないと考えられる。(解答類型３、４)

2　学習指導に当たって

○　証明の根拠として用いられている三角形の合同条件を指摘できるようにする

証明を読み、根拠を見いだすとともに、その根拠に仮定がどのように用いられているかを確認する場面を設定し、証明の根拠として用いられている図形の性質を見いだ

し、三角形の合同条件を指摘できるように指導することが大切である。
　例えば、証明を読み、当てはまる三角形の合同条件を確認するとともに、その合同条件を成り立たせる辺や角の関係を図と対応させて捉える活動を取り入れることが大切である。

設問 $\boxed{1}$ (2)

1　解説

趣旨

　発展的に考え、条件を変えた場合について、証明の一部を書き直すことができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　Ｂ　図形

(2)　図形の合同について理解し図形についての見方を深めるとともに、図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ、論理的に考察し表現する能力を養う。

イ　証明の必要性と意味及びその方法について理解すること。

■評価の観点

数学的な技能

解答類型

問題番号		解答類型			正答
$\boxed{1}$	(2)	1	ウを選択	∠ＡＣＥ＝∠ＡＣＤ－∠ＤＣＥ＝６０°－∠ＤＣＥ ∠ＤＣＢ＝∠ＥＣＢ－∠ＤＣＥ＝６０°－∠ＤＣＥ と解答しているもの	◎
		2		∠ＡＣＥ＝６０°－∠ＤＣＥ ∠ＤＣＢ＝６０°－∠ＤＣＥ と解答しているもの	○
		3		上記１、２以外を解答しているもの	
		4		無解答	
		5	**ア、イ、エ**のいずれかを選択しているもの		
		99	上記以外の解答		
		0	無解答		

■誤答について

・証明のどの部分を書き直すかは理解できているが、どのように書き直せばよいかについて、図を基に考えることができていないと考えられる。（解答類型３、４）

２　学習指導に当たって

○　問題の条件を変えて発展的に考えられるようにする

証明を読み、結論を導くために欠かせない条件や性質を捉える場面を設定し、問題の条件を変えて、発展的に考えることができるように指導することが大切である。

問題に示されている条件の一部を変えた場合の図形の性質を考察する際に、もとの問題の証明を振り返りながら、方針を立てるなどの見通しをもって証明をする場面を設定することが考えられる。また、条件の一部を変える前と変えた後の二つの証明を比べ、証明に用いた条件の違いに着目し、二つの図形の違いを考察していくことは、意図的に条件を変えるといった発展的に考える機会となると考えられる。

設問 1 (3)

１　解説

趣旨

回転移動した図形から、回転角と線分の長さの関係を表すグラフの概形を、事象に即して解釈することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第１学年〕　Ｂ　図形

(1)　観察、操作や実験などの活動を通して、見通しをもって作図したり図形の関係について調べたりして平面図形についての理解を深めるとともに、論理的に考察し表現する能力を培う。

イ　平行移動、対称移動及び回転移動について理解し、二つの図形の関係について調べること。

■評価の観点

数学的な見方や考え方

解答類型

問題番号			解答類型	正答
1	(3)	1	**ア**　と解答しているもの	
		2	**イ**　と解答しているもの	◎
		3	**ウ**　と解答しているもの	
		4	**エ**　と解答しているもの	
		5	**オ**　と解答しているもの	
		99	上記以外の解答	
		0	無解答	

■誤答について

・回転にともなって点Ｇが移動する軌跡が、点Ｃを中心とするＣＧを半径とした半円の円周となることを理解できていないと考えられる。（解答類型１、４、５）

２　学習指導に当たって

○　移動前と移動後の２つの図形の関係を捉えることができるようにする

正方形ＣＢＦＧの頂点が回転移動のきまりにしたがって移動していることを理解する場面を設定することが考えられる。その際、実際に図形を紙で作ったりコンピュータを利用したりするなどして、図形の移動を視覚的に理解できるようにすることが大切である。

○　事象をグラフに表したり、グラフを事象に即して解釈したりすることができるようにする

事象における数量の変化の様子を的確に捉えるためには、その変化の様子をグラフを用いて表したり、グラフを事象に即して解釈したりすることが大切である。

例えば、回転移動させたとき、線分の長さの変化の様子がグラフのどのような特徴に表れるのかを説明する場面や、グラフの特徴から回転移動によって頂点がどのような軌跡を描くのかを考える場面を設定することが考えられる。

設問 1 (4)

１　解説

趣旨

相似形の２つの等脚台形にできる三角形が合同になるための条件を、三角形の辺や角の相等関係に用いることができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　Ｂ　図形

(2)　図形の合同について理解し図形についての見方を深めるとともに、図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ、論理的に考察し表現する能力を養う。

ウ　三角形の合同条件などを基にして、三角形や平行四辺形の基本的な性質を論理的に確かめたり、図形の性質の証明を読んで新たな性質を見いだしたりすること。

■評価の観点

数学的な見方や考え方

解答類型

問題番号		解答類型	正答
1	(4)	(正答の条件) 次の(a)または(b)を解答し、理由に(c)を記述している。 (a)　ＡＣ＝ＤＣ（ＡＣ＝ＡＥ）またはＣＢ＝ＣＧ（ＣＢ＝ＢＦ） (b)　ＡＣ＝ＣＢ (c)　△ＡＣＧ≡△ＤＣＢ　となること	

		（正答例） 　　ＡＣ＝ＤＣ　の場合 （理由） 　　△ＡＣＧと△ＤＣＢにおいて、 　　ＡＣ＝ＤＣ、ＣＧ＝ＣＢ、∠ＡＣＧ＝∠ＤＣＢであり、 　　２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、 　　△ＡＣＧ≡△ＤＣＢ　となるから。		
		1	(a)を記述し、(c)について△ＡＣＧ≡△ＤＣＢとなることの根拠を基に記述しているもの	◎
		2	(a)を記述し、(c)について△ＡＣＧ≡△ＤＣＢとなることのみを記述しているもの	○
		3	(a)のみを記述しているもの	
		4	(b)を記述し、(c)について△ＡＣＧ≡△ＤＣＢとなることの根拠を基に記述しているもの	◎
		5	(b)を記述し、(c)について△ＡＣＧ≡△ＤＣＢとなることのみを記述しているもの	○
		6	(b)のみを記述しているもの	
		99	上記以外の解答	
		0	無解答	

２　学習指導に当たって

○　証明の過程や結論を基に、発展的に考えることができるようにする

発展的に考えることができるようにするために、与えられた性質を証明するだけではなく、条件を変えたり証明を読んだりすることを通して、新たな性質を見いだすことができるようにすることが大切である。

例えば、与えられた問題に条件を付加し、条件に合わせて図をかき直すとともに、証明を振り返り、証明の過程で見いだした事柄や証明された事柄に着目し、新たな性質を見いだすことができるように指導することが大切である。